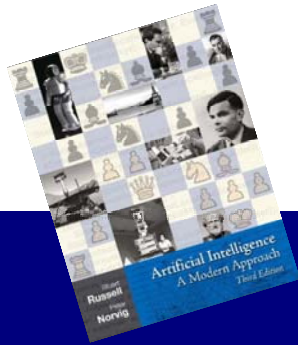


Umělá inteligence II

4

Roman Barták, KTIML

roman.bartak@mff.cuni.cz
http://ktiml.mff.cuni.cz/~bartak

Dnešní program

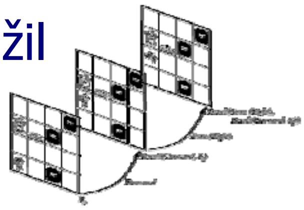
- Agent pracující v **částečně pozorovatelném prostředí** udržuje na základě **senzorického modelu** domnělý stav a na základě **přechodového modelu** odhaduje, jak se svět může vyvíjet.
  - **domnělý stav** reprezentuje možné skutečné stavy světa buď výčtově nebo logickou formulí (přes vlastnosti stavu)
  - pomocí teorie pravděpodobnosti umíme kvantifikovat, které z domnělých stavů jsou pravděpodobnější
  - teď přidáme pravděpodobnost k přechodům mezi stavy

Pravděpodobností uvažování o čase

- reprezentace přechodů s pravděpodobností
- typy řešených úloh (otázek)
- základní odvozovací algoritmy
- temporální modely (skryté Markovské modely, dynamické Bayesovské sítě)

Čas a neurčitost

- Podobně jako v logické reprezentaci sloužil **situační kalkulus**, budeme dynamiku světa modelovat sérií **časových řezů**.



- Každý řez/**stav** bude popsán (stejnou) množinou náhodných proměnných, které se dělí na
  - **nepozorovatelné** náhodné **proměnné** $\mathbf{X}_t$
  - **pozorované** náhodné **proměnné** $\mathbf{E}_t$ (konkrétní pozorované hodnoty označíme $\mathbf{e}_t$)

  t je označení časového řezu (uvažujeme tedy **diskrétní čas** se stejnými časovými kroky)

Notace:
- $X_{a:b}$ označuje množinu proměnných od X_a po X_b

Modelová situace

- Uvažujme agenta pracujícího na tajné podzemní základně, ze které nikdy nevychází.
- Zajímá ho, zda venku prší.
  - náhodná nepozorovatelná proměnná $\mathbf{R}_t$
- Jediné pozorování, které má k dispozici, je zda ráno ředitel přišel s či bez deštníku.
  - náhodná pozorovaná proměnná $\mathbf{U}_t$

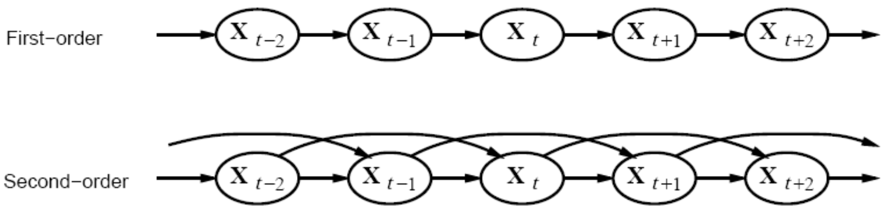
Přechodový model

Přechodový model popisuje, jak je stav ovlivněn předchozími stavy. Přesněji popisuje pravděpodobnostní distribuci $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{0:t-1})$.

Problém č. 1: s rostoucím t neomezeně roste množina $\mathbf{X}_{0:t-1}$

- použijeme **Markovský předpoklad**: současný stav závisí pouze na pevně daném konečném počtu předchozích stavů – hovoříme potom o obecných **Markovských řetězcích/procesech**
- např. současný stav závisí pouze na předchozím stavu – **Markovský proces prvního řádu**

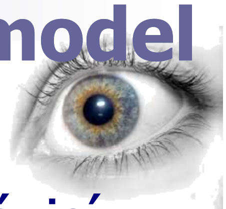
$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{0:t-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{t-1})$



Problém č. 2: pořád máme nekonečně mnoho různých přechodů

- použijeme **předpoklad stacionárního procesu**, tj. stav se vždy mění podle stejných pevně daných pravidel
- distribuce $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{t-1})$ je stejná pro všechny časy t

Senzorický model



Senzorický model popisuje na čem závisí pozorované náhodné proměnné $\mathbf{E}_t$.

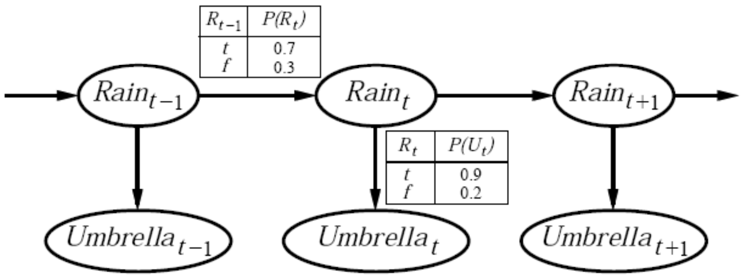
Ty mohou záviset i na proměnných z předchozích stavů, ale uděláme **Markovský senzorický předpoklad** – pozorované proměnné závisí pouze na nepozorovatelných proměnných $\mathbf{X}_t$ ze stejného stavu.

$\mathbf{P}(\mathbf{E}_t \mid \mathbf{X}_{0:t}, \mathbf{E}_{1:t-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{E}_t \mid \mathbf{X}_t)$

Bayesovské sítě

pro přechodový a senzorický model

- Přechodový a senzorický model můžeme popsat **Bayesovskou sítí**.
- Kromě tabulek $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{X}_{t-1})$ a $\mathbf{P}(\mathbf{E}_t \mid \mathbf{X}_t)$ musíme ještě zadat, jak to vše začalo $\mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$.



- Z vlastností Bayesovských sítí víme

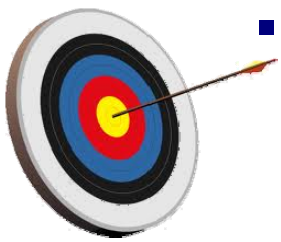
$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{0:t}, \mathbf{E}_{1:t}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_0)\, \Pi_i\, \mathbf{P}(\mathbf{X}_i \mid \mathbf{X}_{i-1})\, \mathbf{P}(\mathbf{E}_i \mid \mathbf{X}_i)$$

Zpřesnění modelu

Markovský proces prvního řádu předpokládá, že stavové proměnné obsahují veškerou informaci pro charakteristiku pravděpodobnostní distribuce dalšího stavu.

Co když je tento předpoklad nepřesný?

- můžeme **zvýšit řád** Markovského procesu
- můžeme **rozšířit množinu** stavových proměnných
  - např. přidáme proměnnou $Season_t$ nebo sadu proměnných $Temperature_t$, $Humidity_t$, $Pressure_t$
  - první případ (větší řád) lze vždy převést na druhý případ (více proměnných)



Řešené úlohy

- **Filtrace**: úloha zjistit pravděpodobnost aktuálního stavu na základě dosavadních pozorování
  $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})$
- **Predikce**: úloha zjistit pravděpodobnost budoucího stavu na základě dosavadních pozorování
  $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k} \mid \mathbf{e}_{1:t})$ pro k>0
- **Vyhlazování**: úloha zjistit pravděpodobnost minulého stavu na základě dosavadních pozorování
  $\mathbf{P}(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{e}_{1:t})$ pro k: $0 \leq k < t$
- **Nejpravděpodobnější průchod**: úloha zjistit z posloupnosti pozorování nejpravděpodobnější posloupnost stavů, která tato pozorování generuje
  $\operatorname{argmax}_{\mathbf{x}_{1:t}} P(\mathbf{x}_{1:t} \mid \mathbf{e}_{1:t})$

Filtrace

- Úkolem je zjistit pravděpodobnost aktuálního stavu na základě dosavadních pozorování – $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t})$.
- Dobrý finanční algoritmus odhaduje aktuální stav z odhadu předchozího stavu a aktuálního pozorování (**rekurzivní odhad**)
  $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) = f(\mathbf{e}_{t+1},\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t}))$

Jak najdeme funkci f?

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) &= \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t},\mathbf{e}_{t+1}) \\
&= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1},\mathbf{e}_{1:t})\, \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) \\
&= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})\, \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) \\
&= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})\, \Sigma_{\mathbf{x}_t}\, \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t,\mathbf{e}_{1:t})\, P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t}) \\
&= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})\, \Sigma_{\mathbf{x}_t}\, \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t)\, P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})
\end{aligned}$$

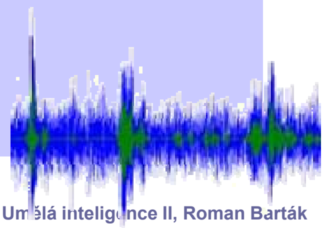
Bayesovo pravidlo

Markovský senzorický předpoklad

podmiňování
$\mathbf{P}(\mathbf{Y}) = \Sigma_z\, \mathbf{P}(\mathbf{Y}|\mathbf{z})\, P(\mathbf{z})$

Můžeme tedy použít techniku dopředné propagace zprávy:

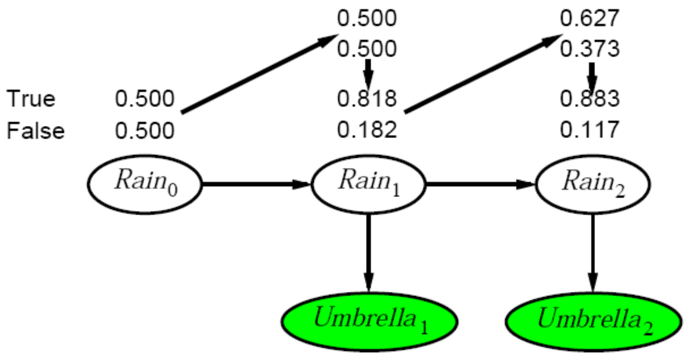
$\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t}) = \mathbf{f}_{1:t}$
$\mathbf{f}_{1:t+1} = \alpha\, \text{FORWARD}(\mathbf{f}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1})$
$\mathbf{f}_{1:0} = \mathbf{P}(\mathbf{X}_0)$

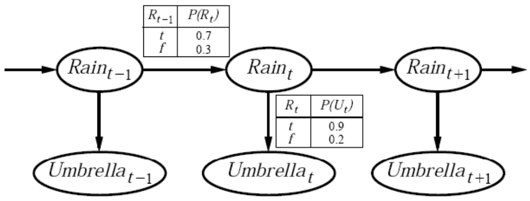


Filtrace

příklad

$\mathbf{P}(\mathbf{R}_{t+1}|\mathbf{u}_{1:t+1})$
$= \alpha\ \mathbf{P}(\mathbf{u}_{t+1}|\mathbf{R}_{t+1})\ \mathbf{P}(\mathbf{R}_{t+1}|\mathbf{u}_{1:t}) = \alpha\ \mathbf{P}(\mathbf{u}_{t+1}|\mathbf{R}_{t+1})\ \Sigma_{\mathbf{r}_t}\ \mathbf{P}(\mathbf{R}_{t+1}|\mathbf{r}_t)\ P(\mathbf{r}_t|\mathbf{u}_{1:t})$





$\mathbf{P}(\mathbf{R}_0) = \langle 0.5, 0.5\rangle$

$\mathbf{P}(\mathbf{R}_1)$
$= \Sigma_{\mathbf{r}_0}\ \mathbf{P}(\mathbf{R}_1|\mathbf{r}_0)\ P(\mathbf{r}_0)$
$= \langle 0.5, 0.5\rangle$

$\mathbf{P}(\mathbf{R}_1|\mathbf{u}_1)$
$= \alpha\ \mathbf{P}(\mathbf{u}_1|\mathbf{R}_1)\ \mathbf{P}(\mathbf{R}_1)$
$= \alpha\ \langle 0.9, 0.2\rangle \langle 0.5, 0.5\rangle$
$\approx \langle 0.818, 0.182\rangle$

$\mathbf{P}(\mathbf{R}_2|\mathbf{u}_1)$
$= \Sigma_{\mathbf{r}_1}\ \mathbf{P}(\mathbf{R}_2|\mathbf{r}_1)\ P(\mathbf{r}_1|\mathbf{u}_1)$
$= \langle 0.7, 0.3\rangle \times 0.818$
$+ \langle 0.3, 0.7\rangle \times 0.182$
$\approx \langle 0.627, 0.372\rangle$

$\mathbf{P}(\mathbf{R}_2|\ \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$
$= \alpha\ \mathbf{P}(\mathbf{u}_2|\mathbf{R}_2)\ \mathbf{P}(\mathbf{R}_2\ |\mathbf{u}_1)$
$= \alpha\ \langle 0.9, 0.2\rangle \langle 0.627, 0.372\rangle$
$= \langle 0.883, 0.117\rangle$

Predikce

- Úkolem je zjistit pravděpodobnost budoucího stavu na základě dosavadních pozorování – $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k}\ |\ \mathbf{e}_{1:t})$ pro k>0.
- Jedná se v podstatě o filtraci bez přidávání dalších pozorování

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k+1}|\mathbf{e}_{1:t}) = \Sigma_{\mathbf{x}_{t+k}}\ \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k+1}|\mathbf{x}_{t+k})\ P(\mathbf{x}_{t+k}|\mathbf{e}_{1:t})$$

- Po určité době (**mixing time**) konverguje předpovězená distribuce ke stacionární distribuci a nadále zůstane stejná.

Vyhlazování

- Úkolem je zjistit pravděpodobnost minulého stavu na základě dosavadních pozorování – $\mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:t})$ pro k: $0 \le k < t$.
- Opět použijeme rekurzivní předávání zpráv, tentokrát ve dvou směrech.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:t}) &= \mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:k},\mathbf{e}_{k+1:t})\\ &= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:k})\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k,\mathbf{e}_{1:k})\\ &= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:k})\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k)\\ &= \alpha\, \mathbf{f}_{1:k} \times \mathbf{b}_{k+1:t}\end{aligned}$$

Bayesovo pravidlo

podmíněná nezávislost

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k) &= \Sigma_{\mathbf{x}_{k+1}} \mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k,\mathbf{x}_{k+1})\, \mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{X}_k)\\ &= \Sigma_{\mathbf{x}_{k+1}} P(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{x}_{k+1})\, \mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{X}_k)\\ &= \Sigma_{\mathbf{x}_{k+1}} P(e_{k+1},\mathbf{e}_{k+2:t}|\mathbf{x}_{k+1})\, \mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{X}_k)\\ &= \Sigma_{\mathbf{x}_{k+1}} P(e_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1})\, P(\mathbf{e}_{k+2:t}|\mathbf{x}_{k+1})\, \mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{X}_k)\end{aligned}$$

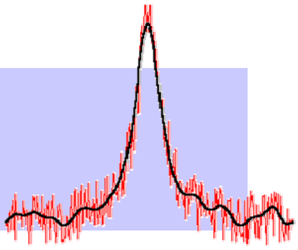
podmiňování

podmíněná nezávislost

podmíněná nezávislost

Popíšeme jako zpětnou propagaci zprávy:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k) = \mathbf{b}_{k+1:t}\\ &\mathbf{b}_{k+1:t} = \text{BACWARD}(\mathbf{b}_{k+2:t}, \mathbf{e}_{k+1})\\ &\mathbf{b}_{t+1:t} = \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1:t}|\mathbf{X}_t) = \mathbf{P}(|\mathbf{X}_t) = \mathbf{1}\end{aligned}$$



Vyhlazování

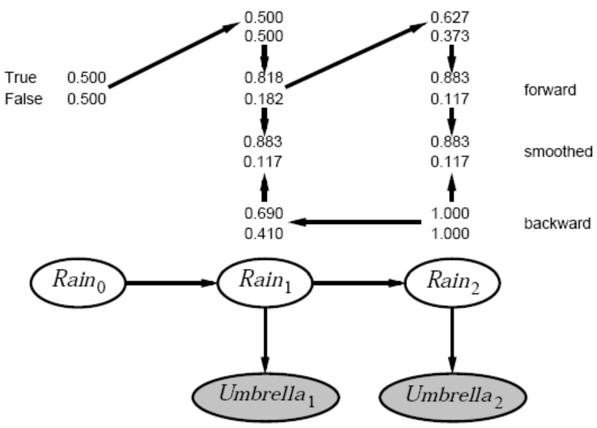
příklad

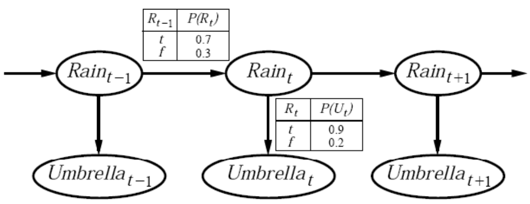
$$\mathbf{P}(R_k|u_{1:t+1}) = \alpha\, \mathbf{P}(R_k|u_{1:k})\, \mathbf{P}(u_{k+1:t}|R_k)$$

$$P(u_{k+1:t}|R_k) = \Sigma_{\mathbf{r}_{k+1}} P(u_{k+1}|r_{k+1})\, P(u_{k+2:t}|r_{k+1})\, \mathbf{P}(r_{k+1}|R_k)$$

$$\mathbf{P}(|R_2) = \mathbf{1}$$

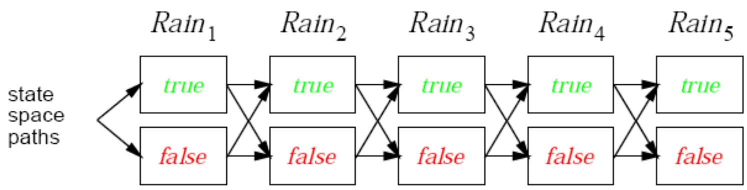
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(u_2|R_1) &= \Sigma_{r_2} P(u_2|r_2)\, P(|r_2)\, \mathbf{P}(r_2|R_1)\\ &= 0.9\times1\times\langle0.7,0.3\rangle + 0.2\times1\times\langle0.3,0.7\rangle = \langle0.69,0.41\rangle\end{aligned}$$





Nejpravděpodobnější průchod

- Úkolem je zjistit z posloupnosti pozorování nejpravděpodobnější posloupnost stavů, která tato pozorování generuje – $\text{argmax}_{x_{1:t}} P(x_{1:t} \mid \mathbf{e}_{1:t})$.
- Pozor, je to něco jiného než zjistit posloupnost nejpravděpodobnějších stavů!
- Na problém se můžeme podívat takto:
  - **hledáme cestu v grafu**, kde uzly odpovídají možným stavům v každém časovém kroku



  - díky Markovské vlastnosti víme, že nejpravděpodobnější cesta do daného stavu se skládá z nejpravděpodobnější cesty do některého předchůdce a přechodu do daného stavu
  - tuto vlastnost opět můžeme popsat **rekurzivně**

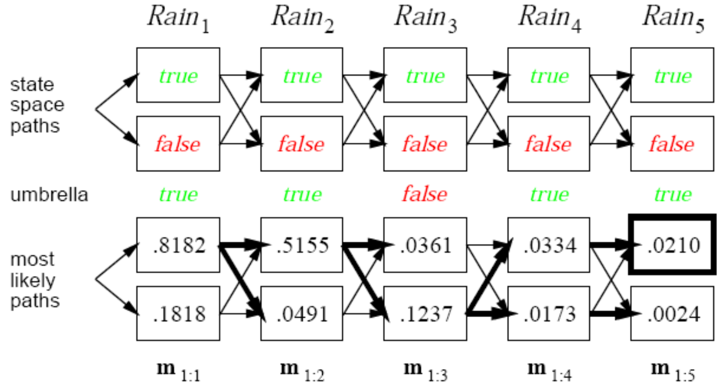
Viterbiho algoritmus

- nejpravděpodobnější cesta do daného stavu se skládá z nejpravděpodobnější cesty do některého předchůdce a přechodu do daného stavu

$$\max_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t} \mathbf{P}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t,\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1})$$
$$= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1}) \max_{\mathbf{x}_t} (\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t) \max_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{t-1}} P(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t}))$$

- použijeme techniku dopředné propagace zprávy:

$$m_{1:t} = \max_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{t-1}} \mathbf{P}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{t-1},\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t})$$
$$m_{1:t+1} = \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1}) \max_{\mathbf{x}_t} (\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t)\, m_{1:t})$$



Skryté Markovské modely

- Uvažujme, že stav světa je popsán jedinou náhodnou proměnnou X_t (podobně pozorovaná proměnná E_t bývá jediná).
- Hovoříme potom o **skrytém** (částečně pozorovaném) **Markovském modelu** (HMM – Hidden Markov Model).
- Pro takový speciální případ můžeme **úlohy** řešit efektivně **pomocí maticových operací**.
- Uvažujme, že proměnná X_t nabývá hodnoty z množiny {1,…S}, tj. S je počet možných stavů světa.
  - pravděpodobnostní tabulku $\mathbf{P}(X_t \mid X_{t-1})$ pro **přechody** lze popsat maticí **T** o rozměrech $S \times S$, kde:

    $\mathbf{T}_{(i,j)} = P(X_t = j \mid X_{t-1}=i)$
  - podobně můžeme popsat tabulku pro **pozorování**, kde využijeme toho, že konkrétní pozorování e_t známe, takže popisujeme $P(E_t = e_t \mid X_t=i)$, použijeme diagonální matici $\mathbf{O}_t$, kde:

    $\mathbf{O}_{t\ (i,i)} = P(E_t = e_t \mid X_t=i)$

Maticový přístup

- **Dopředné zprávy** (z filtrace)
  - $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t}) = \mathbf{f}_{1:t}$
  - $\mathbf{f}_{1:t+1} = \alpha\ \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})\ \Sigma_{\mathbf{x}_t}\ \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t)\ P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})$
- Pomocí matic (uvažujme, že zpráva $\mathbf{f}_{1:t}$ je ve tvaru jednoho sloupce)
  - $\mathbf{T}_{(i,j)} = P(X_t = j \mid X_{t-1}=i)$
  - $\mathbf{O}_{t\ (i,i)} = P(E_t = e_t \mid X_t=i)$
  - $\mathbf{f}_{1:t+1} = \alpha\ \mathbf{O}_{t+1}\ \mathbf{T}^T\ \mathbf{f}_{1:t}$
- **Zpětné zprávy** (z vyhlazování)
  - $\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k) = \mathbf{b}_{k+1:t}$
  - $\mathbf{b}_{k+1:t} = \Sigma_{\mathbf{x}_{k+1}}\ P(e_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1})\ P(\mathbf{e}_{k+2:t}|\mathbf{x}_{k+1})\ \mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{X}_k)$
- Pomocí matic (uvažujme, že zpráva $\mathbf{b}_{k:t}$ je ve tvaru jednoho sloupce)
  - $\mathbf{b}_{k+1:t} = \mathbf{T}\ \mathbf{O}_{k+1}\ \mathbf{b}_{k+2:t}$

Úplné vyhlazování

- Při vyhlazování nám typicky nejde pouze o jednu proměnnou, ale o **vyhlazení všech proměnných najednou**.

  $\mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:t}) = \alpha\ \mathbf{f}_{1:k} \times \mathbf{b}_{k+1:t}$

  - pro vyhlazení jedné proměnné vzhledem k $\mathbf{e}_{1:t}$ potřebujeme čas O(t)
  - triviální algoritmus tedy postup vyhlazení opakuje pro všechny proměnné – čas $O(t^2)$
  - lepší přístup používá **dynamické programování**, tj. pamatujeme si dopředné zprávy a při zpětném průchodu je spojíme se zpětnými zprávami – čas O(t)
    - **algoritmus forward-backward**
    - nevýhodou přístupu je prostorová složitost O(|**f**|t)

Úplné vyhlazování

algoritmus forward-backward

```
function FORWARD-BACKWARD(ev, prior) returns a vector of probability distributions
  inputs: ev, a vector of evidence values for steps 1,...,t
          prior, the prior distribution on the initial state, P(X0)
  local variables: fv, a vector of forward messages for steps 0,...,t
                   b, a representation of the backward message, initially all 1s
                   sv, a vector of smoothed estimates for steps 1,...,t

  fv[0] ← prior
  for i = 1 to t do
     fv[i] ← FORWARD(fv[i − 1], ev[i])
  for i = t downto 1 do
     sv[i] ← NORMALIZE(fv[i] × b)
     b ← BACKWARD(b, ev[i])
  return sv
```

Úplné vyhlazování
efektivně

Můžeme úplné vyhlazení udělat s menšími paměťovými nároky při zachování časové složitosti O(t)?

Idea:

- pokud bychom uměli výpočet udělat pouze v jednom směru, stačí nám konstantní paměť (nezávislá na t)
- můžeme zprávu $\mathbf{f}_{1:t}$ získat ze zprávy $\mathbf{f}_{1:t+1}$?
- potom bychom mohli „dopřednou" zprávu propagovat stejně jako „zpětnou zprávu"

Použijeme **maticový přístup**

$$\mathbf{f}_{1:t+1} = \alpha\, \mathbf{O}_{t+1}\, \mathbf{T}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{f}_{1:t} \quad \rightarrow \quad \mathbf{f}_{1:t} = \alpha'(\mathbf{T}^{\mathsf{T}})^{-1}\, (\mathbf{O}_{t+1})^{-1}\, \mathbf{f}_{1:t+1}$$

Algoritmus

- nejprve dopředným průchodem vypočteme $\mathbf{f}_{1:t}$
- potom při zpětném chodu dohromady počítáme $\mathbf{f}_{1:k}$ a $\mathbf{b}_{k+1:t}$

Vyhlazování se zpožděním

- Uvažujme nyní případ, kde nás zajímá hodnota $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t-d}|\mathbf{e}_{1:t})$ s pevně daným zpožděním d, tzv. **vyhlazování s konstantním zpožděním**.
- Ideálně chceme, aby výpočet při zvětšení t fungoval inkrementálně tj. v konstantním čase.
  - máme $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t-d}|\mathbf{e}_{1:t}) = \alpha\, \mathbf{f}_{1:t-d} \times \mathbf{b}_{t-d+1:t}$
  - chceme $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t-d+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) = \alpha\, \mathbf{f}_{1:t-d+1} \times \mathbf{b}_{t-d+2:t+1}$

Inkrementální postup:

- umíme $\mathbf{f}_{1:t-d+1} = \alpha\, \mathbf{O}_{t-d+2}\, \mathbf{T}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{f}_{1:t-d}$
- potřebujeme inkrementální výpočet $\mathbf{b}_{t-d+2:t+1}$ z $\mathbf{b}_{t-d+1:t}$
  - $\mathbf{b}_{t-d+1:t} = \mathbf{T}\, \mathbf{O}_{t-d+1}\, \mathbf{b}_{t-d+2:t} = (\Pi_{i=t-d+1,\dots,t}\, \mathbf{T}\, \mathbf{O}_i)\, \mathbf{b}_{t+1:t} = \mathbf{B}_{t-d+1:t}\, \mathbf{1}$
  - $\mathbf{b}_{t-d+2:t+1} = (\Pi_{i=t-d+2,\dots,t+1}\, \mathbf{T}\, \mathbf{O}_i)\, \mathbf{b}_{t+2:t+1} = \mathbf{B}_{t-d+2:t+1}\, \mathbf{1}$
  - $\mathbf{B}_{t-d+2:t+1} = (\mathbf{O}_{t-d+1})^{-1}\, \mathbf{T}^{-1}\, \mathbf{B}_{t-d+1:t}\, \mathbf{T}\, \mathbf{O}_{t+1}$

Vyhlazování se zpožděním

algoritmus

function FIXED-LAG-SMOOTHING(e_t, hmm, **d**) **returns** a distribution over $\mathbf{X}_{t-d}$
  inputs: e_t, the current evidence for time step t
    hmm, a hidden Markov model with S x S transition matrix T
    d, the length of the lag for smoothing
  static: t, the current time, initially 1
    f, a probability distribution, the forward message $\mathbf{P}(X_t|e_{1:t})$, initially PRIOR[hmm]
    B, the d-step backward transformation matrix, initially the identity matrix
    $e_{t-d:t}$, double-ended list of evidence from t – d to t, initially empty
  local variables: $\mathbf{O}_{t-d}$, $\mathbf{O}_t$, diagonal matrices containing the sensor model information

  add e_t to the end of $e_{t-d:t}$
  $\mathbf{O}_t \leftarrow$ diagonal matrix containing $\mathbf{P}(e_t|X_t)$
  if t > **d then**
    $\mathbf{f} \leftarrow$ FORWARD($\mathbf{f}, e_t$)
    remove e_{t-d-1} from the beginning of $e_{t-d:t}$
    $\mathbf{O}_{t-d} \leftarrow$ diagonal matrix containing $\mathbf{P}(e_{t-d}|X_{t-d})$
    $\mathrm{B} \leftarrow \mathbf{O}_{t-d}^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{BTO}_t$
  else $\mathrm{B} \leftarrow \mathbf{BTO}_t$
  $t \leftarrow t+1$
  if t > **d then return** NORMALIZE(**f** x **B1**) **else return** null

Lokalizace

příklad

- Uvažujme případ, kdy náhodně pohybující se agent má mapu světa, senzory ukazující okolí a potřebuje zjistit, kde se nachází.

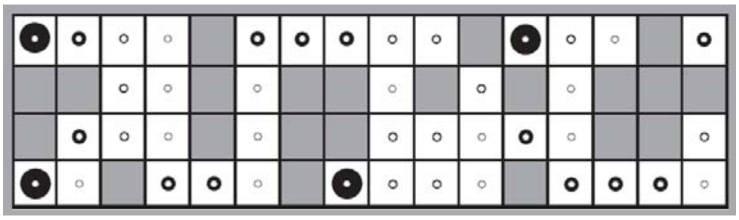
Model:

- **náhodná proměnná** X_t popisuje lokaci v čase t
  - možné hodnoty 1,..,n pro n možných pozic
  - Nb(i) – množina pozic v okolí pozice i, kam agent může přejít
- **přechodová tabulka**
  - $P(X_{t+1}=j|X_t=i) = 1/\ |Nb(i)|$, pokud $j \in Nb(i)$, jinak 0
- **senzorická proměnná** E_t popisuje výsledek pozorování okolí (čtyři senzory NSEW)
  - hodnoty popisují přítomnost překážky NSEW (16 hodnot)
  - uvažujme chybovost senzoru ε
- **senzorická tabulka**
  - $P(E_t=e_t|X_t=i) = (1-\varepsilon)^{4-d_{it}}\ \varepsilon^{d_{it}}$
    kde d_{it} je počet odchylek pozorování e_t od skutečného okolí pozice i

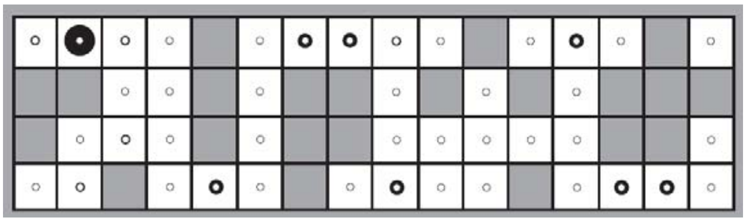
Lokalizace

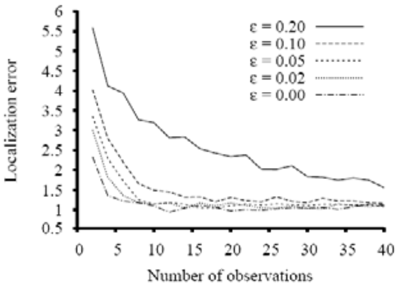
ukázka

$\mathbf{P}(X_1|E_1=NSW)$



$\mathbf{P}(X_2|E_1=NSW, E_2=NS)$





chyba lokalizace
(Manhattanská vzdálenost)